Beitrag

zur

Lehre vom identischen Verschwinden der Riemannschen Theta-Function.

Inauguraldissertation,

der

mathematischen und naturwissenschaftlichen Facultät

der

Kaiser-Wilhelms-Universität Strassburg

zur Erlangung der Doctorwürde

vorgelegt von

Victor DŒRR

aus Kirchheimbolanden.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

Strassburg,

Buchdruckerei von R. Schultz und Comp.

1883.

Beitrag zur Lehre

vom identischen Verschwinden der Riemannschen Theta-Function.

Einleitung.

Die Lehre vom Verschwinden der Riemannschen ϑ-Function gründet sich auf den von Riemann entdeckten Satz, dass der Ausdruck

$$\text{(a)} \qquad \vartheta\left(\left(-\sum_{\varkappa=1}^{p-1} u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + K_\mu\right)\right) = 0$$

ist, und zwar identisch d. h. wie auch immer die $p-1$ Punkte $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{p-1}$ in der einfachzusammenhängenden Fläche T' angenommen werden mögen.

Dieser Satz, sowie die ganze Theorie der Riemannschen ϑ-Function haftet an der ausdrücklichen Bedingung, dass für jede Lage des Punktes o

$$u_1(o),\ u_2(o) \ldots u_p(o)$$

Simultanwerte der Normalintegrale I. G. $u_1, u_2 \ldots u_p$ in diesem Punkte o sein müssen, nämlich:

(b) Die Integrale $u_1, u_2 \ldots u_p$ sind zunächst auf das Innere der einfachzusammenhängenden Fläche T' zu beschränken, und von da aus darf keines von ihnen sich um einen Periodicitätsmodul ändern, ohne dass alle übrigen um die entsprechenden Moduln geändert werden.

Um diese Grundbedingung vollständig durchzuführen, muss noch über die Anfangs-

werte verfügt werden, welche $u_1, u_2 \ldots u_p$ an einer beliebig anzunehmenden Stelle haben sollen. Ist dies aber geschehen, so sind auch die Werte der RIEMANNschen Constanten $K_1, K_2 \ldots K_p$ völlig determiniert, wie sich aus den von RIEMANN herrührenden Integralausdrücken derselben* ergiebt.

Wird nun die Grundbedingung (b) für die Punkte $\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{p-1}$ eingehalten, aber für den Punkt ε_1 verletzt, indem $u_1(\varepsilon_1), u_2(\varepsilon_1) \ldots u_p(\varepsilon_1)$ um Systeme nicht correspondierender Periodicitätsmoduln vermehrt werden, so findet man sehr leicht, dass die Gleichung (a) nicht mehr für alle Lagen der $p-1$ Punkte $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{p-1}$ stattfindet. Der Lehrsatz, welcher in dieser Gleichung enthalten ist, kann demnach auch so ausgesprochen werden:

(c) Es ist zulässig und führt zu keinem Widerspruch, wenn man fordert, die Gleichung (a) solle für alle Lagen der $p-1$ Punkte $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{p-1}$ erfüllt sein.

Werden alsdann die Functionen $u_1, u_2 \ldots u_p$ für die $p-2$ Punkte $\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{p-1}$ auf Simultanwerte beschränkt, so geschieht der Gleichung (a) nur noch Genüge, wenn auch für

$$u_1(\varepsilon_1),\ u_2(\varepsilon_1) \ldots u_p(\varepsilon_1)$$

Simultanwerte genommen werden.

Folglich ist die Gleichung (a) nichts weniger als eine identische; sie ist vielmehr der analytische Ausdruck für die Grundbedingung (b) der Lehre von der RIEMANNschen ϑ-Function, also genau das, was man in der sonst üblichen Ausdrucksweise den Ansatz der Aufgabe nennen würde, die Werte $u_1, u_2, \ldots u_p$ so mit einander zu verknüpfen, dass sie nur noch Simultanwerte sein können.

Die vorliegende Arbeit stellt sich die Aufgabe, diese Auffassung des RIEMANNschen Theorems, welche von Herrn Professor CHRISTOFFEL herrührt, durch ein vollständig ausgeführtes Beispiel zur Anschauung zu bringen.

Im Falle $p = 2$, welchem dieses Beispiel angehört, lautet die Gleichung (a)

(d) $$\vartheta(u_1 - K_1 \mid u_2 - K_2) = 0;$$

sie ist identisch erfüllt, wenn u_1, u_2 Simultanwerte sind, bestimmt aber auch von den beiden Integralen I. G., welche in diesem Falle stattfinden, das eine als Function des andern so, dass u_1, u_2 Simultanwerte werden.**

Der von mir behandelte besondere Fall gehört zu denjenigen, welche die völlige Ermittelung der RIEMANNschen Constanten K_1, K_2 gestatten; hier kann also der Ausdruck für die ϑ-Function mit vorgeschriebenen Nullpunkten vollständig ausgeführt werden.

---

* Gesammelte Werke, Seite 199 (2).

** Für den Fall $p = 2$ ist eine ähnliche Auffassung der RIEMANNschen Gleichung (d) schon von ROCH ausgesprochen worden (BORCHARDTS Journal, Band 65, Seite 44).

Durch die Anlage unserer Untersuchung ist die wirkliche Auflösung der Gleichung (d) vorbereitet, indem von den beiden Integralen I. G., v und V, aus denen sich die Normalintegrale u_1, u_2 zusammensetzen, das zweite als Function des ersten bereits vorliegt: die Gleichung (d) in ihrer vollständig ausgearbeiteten Form zeigt, wie sich in Folge dessen umgekehrt auch v als Function von V ausdrücken lässt.

Damit ist unser Zweck erreicht, indem zur Evidenz gebracht ist, dass die Gleichung (d) nicht als eine identische aufgefasst werden darf, sondern als die Bedingung, welcher v und V genügen müssen, wenn sie Simultanwerte sein sollen.

Ausserdem ist ein beachtenswertes Nebenresultat gewonnen, indem thatsächlich für ein einzelnes Integral I. G. V, welches einem Genus $p > 1$ angehört, die Inversion geleistet ist, und zwar nicht eine Inversion, welche auf ein abgegrenztes Convergenzgebiet beschränkt ist, sondern die unbeschränkte Inversion.

Erster Teil.

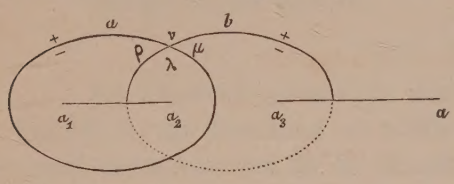
Die Fläche T und die Integrale I. Gattung.

§ 1.

Meine Untersuchung geht von den folgenden bekannten Resultaten aus: Sei

$$\sigma^2 = (z - \alpha_1)\,(z - \alpha_2)\,(z - \alpha_3)\,(z - \alpha)$$

Product aus vier ungleichen Wurzelfactoren. Zu der Function σ gehört eine zweiblättrige Fläche τ mit zwei Doppellinien, welche von α_1 nach α_2 und von α_3 nach α geführt sein mögen. Diese Fläche wird durch ein Querschnittpaar a, b (siehe die Figur) zu einer einfachzusammenhängenden τ'. Zu ihr gehört das Integral erster Gattung

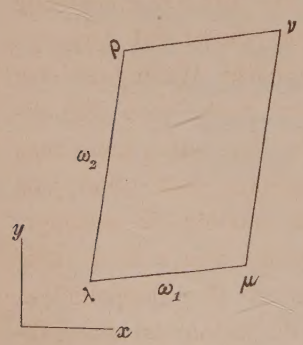


$$v = \int_{\alpha}^{z} \frac{dz}{\sigma},$$

welches an den Querschnitten die folgenden Periodicitätsmoduln hat:

$$\omega_1 = \int \begin{vmatrix} \mu \\ b \\ \lambda \end{vmatrix} \frac{dz}{\sigma} \qquad \text{und} \qquad \omega_2 = \int \begin{vmatrix} \rho \\ a \\ \lambda \end{vmatrix} \frac{dz}{\sigma}$$

Das Bild dieser Fläche τ' über der v-Ebene ist eine Periodenfläche Π. Es mögen die Querschnitte in τ' so geführt sein, dass Π ein geradliniges Parallelogramm ist. Seine Seiten ω_1 und ω_2 liegen zu einander wie dx zu dy.



Jede wie die Fläche τ verzweigte algebraische Function von z ist als Function von v einwertig und doppeltperiodisch von endlicher Ordnung. Aus der Reihe dieser Functionen sei eine von der zweiten Ordnung herausgehoben, deren Nullpunkte vereint liegen. Sie drückt sich durch die ungerade Jacobische Thetafunction $\vartheta\,(v \mid \omega_1, \omega_2) = \vartheta\,(v)$ in folgender Weise aus:

$$U^2 = c^2 \frac{\left[\vartheta(a)\,\vartheta(v-b)\right]^2}{\left[\vartheta'(0)\right]^2\,\vartheta(a+b-v)\,\vartheta(a-b+v)},$$

wo a, b, c Constanten bedeuten und $\vartheta'(0)$ den Wert der Derivierten $\vartheta'(v)$ für $v=0$. Sind für $v=b$ die Werte von z, σ, $\frac{d\sigma}{dz}$ gleich z_0, σ_0, σ'_0, so stellt sich U^2 durch z und σ ausgedrückt folgendermassen dar:

$$U^2 = \frac{k(z-z_0)^2}{\sigma+\sigma_0+\sigma'_0(z-z_0)+\gamma(z-z_0)^2},$$

wo k und γ Constanten sind. Der Nenner verschwindet zur zweiten Ordnung für $z=z_0$, $\sigma=-\sigma_0$ und zur ersten Ordnung für die Wertepaare von z und σ, welche $v=b+a$ und $v=b-a$ entsprechen. Diese Nullpunkte mögen δ und ε heissen.

§ 2.

Mit Hilfe dieser Function U bilden wir eine neue Irrationalität

$$s = \frac{x_1}{\sigma} + \frac{x_2}{\sigma}\sqrt{\frac{(z-z_0)^2}{\sigma+\sigma_0+\sigma'_0(z-z_0)+\gamma(z-z_0)^2}},$$

wo x_1 und x_2 willkürliche Constanten sein mögen. Dies ist eine vierwertige algebraische Function von z; um sie eindeutig zu machen, bedarf man einer vierblättrigen Fläche, welche T heissen möge und jetzt näher charakterisiert werden soll. Man beachte, dass die Verzweigungspunkte von σ auch solche für die neue Function s sind. Ausserdem hat s noch zwei Verzweigungspunkte, nämlich die Punkte δ und ε, in welchen das zweite Glied unendlich wird. Der erste Summand ist eindeutig in der Fläche τ und wenn z in ihr einen vollständigen Umlauf um einen der Verzweigungspunkte α_1, α_2, α_3, α ausführt, so kehrt nicht allein der erste, sondern auch der zweite Summand von s zu seinem Anfangswerte zurück. Anders aber, wenn δ oder ε umkreist wird. Dann ändert der zweite Summand sein Zeichen. Um also s in τ eindeutig zu machen, ist von δ nach ε eine Sperrlinie Δ anzulegen; an dieser hat derjenige Zweig von s, welcher τ zugeordnet ist, zu beiden Seiten ungleiche Werte, die sich durch das Vorzeichen des zweiten Gliedes unterscheiden. Jetzt denke man sich die Fläche τ zweimal, τ_1 und τ_2, jedesmal mit der Sperrlinie Δ; der ersten kann man dann den einen Zweig von s zuordnen, der zweiten den andern, und wenn jetzt τ_1 und τ_2 längs Δ übers Kreuz zusammengeheftet werden, so entsteht die verlangte Fläche T, weil nun die beiden, τ_1 und τ_2 zugeordneten Zweige von s an Δ stetig in einander übergehen. Diese Fläche T hat zwischen vier Blättern fünf Doppellinien, nämlich ausser Δ deren zwei in τ_1 und zwei in τ_2; somit ist die Anzahl der überzäh-

ligen Doppellinien $p = 2$. Dies ist also für diese Fläche T die Anzahl der linearunabhängigen Integranden erster Gattung. Der Ausdruck s zeigt, dass er selbst ein solcher ist, wie auch die Constanten x_1 und x_2 angenommen werden mögen. Demnach sind

$$v = \int \frac{dz}{\sigma} \quad \text{und} \quad V = \int \frac{dz}{\sigma} \sqrt{\frac{(z - z_0)^2}{\sigma + \sigma_0 + \sigma'_0 (z - z_0) + \gamma (z - z_0)^2}}$$

zwei dieser Fläche T zugeordnete linearunabhängige Integrale I. Gattung. Um sie eindeutig zu machen, bedarf es zweier Querschnittpaare a, b. Als solche nehmen wir die Querschnitte a_1, b_1 und a_2, b_2 der Flächen τ'_1 und τ'_2. Die so erhaltene Fläche möge T_1 heissen.

§ 3.

Wir bilden nun diese begrenzte Fläche T_1 über der v-Ebene ab und untersuchen zugleich den Verlauf von V in dieser Abbildung, d. h. V als Function von v. Als untern Grenzpunkt des Integrales v wählen wir den Verzweigungspunkt α der Fläche τ'_1 und nennen, wie in § 1, Π das Bild von τ', dem entsprechend Π_1, Π_2 die Bilder von τ'_1, τ'_2.

Zunächst ist leicht einzusehen, dass Π_1 und Π_2 einander überall bedecken. Sei nämlich o irgend ein Punkt von τ und o_1, o_2 seien die entsprechenden, also congruenten Punkte von τ_1, τ_2. Es ist zu beweisen, dass die Integration, nicht durch τ', sondern durch die vierblättrige Fläche T erstreckt, für v in o_1 den gleichen Wert liefert, wie in o_2.

Man führe in τ_1 von α nach o_1 den Integrationsweg l_1, in τ'_2 vom gleichen Verzweigungspunkte, welcher α' heisse, nach o_2 den congruenten Weg l_2 und ergänze letztern durch einen Weg λ von α nach α' zum Integrationswege von α nach o_2. Da l_1, l_2 gleiche Zunahmen für v ergeben, so ist der Ueberschuss des Wertes, den v in o_2 annimmt, über den Wert von v in o_1 gleich dem Integral von α über λ nach α'. Dieses aber ist gleich Null, denn man kann λ so wählen, dass der Theil, welcher von α bis zur Doppellinie Δ führt, mit seiner Fortsetzung von dort bis α' congruent wird. In congruenten Stellen beider Weghälften durchläuft σ gleiche Werte, die Zunahmen von z aber sind entgegengesetzt gleich, demnach auch die Zunahmen von v; also erlangt v in α' denselben Wert wie in α, nämlich den Wert Null, und die Werte von v in o_1 und o_2 sind gleich.

Congruente Punkte o_1, o_2 von τ'_1, τ'_2 bilden sich ab als einander bedeckende Punkte von Π_1, Π_2, also bedecken die letztern einander überall.

Die beiden Parallelogramme stehen in Verbindung mit einander längs einer Doppellinie, welche als Bild von Δ die beiden Punkte $v = b + a$ und $v = b - a$ mit einander verbindet. Wir wollen durch eine erlaubte Verschiebung über der v-Ebene den Punkt $v = b$ zum Mittelpunkt dieser zweiblättrigen Fläche P machen.

Bezieht man die Function V auf diese Fläche P, so stellt sie sich bis auf einen constanten Factor, den wir unterdrücken, in folgender Gestalt dar:

$$V = \int \frac{\vartheta(a)\,\vartheta(v-b)\,dv}{\vartheta'(0)\sqrt{\vartheta(a+b-v)\,\vartheta(a-b+v)}}.$$

Wir lassen die Integration im Verzweigungspunkte $v = b + a$ beginnen und bezeichnen durch B den Anfangswert von V. Dann wird

$$V - B = \int_{b+a}^{v} \mathfrak{U}\,dv$$

für

$$\mathfrak{U} = \frac{\vartheta(a)\,\vartheta(v-b)}{\vartheta'(0)\sqrt{\vartheta(a+b-v)\,\vartheta(a-b+v)}}.$$

§ 4.

Um zu ermitteln, wie sich die Werte von V der Fläche P zuordnen, muss zunächst diese Function $\mathfrak{U}$ näher untersucht werden.

$\mathfrak{U}^2$ hat als einwertige doppeltperiodische Function von v in solchen Punkten der Fläche P, welche zu $v - b = 0$ symmetrisch liegen, denselben Wert. Seien $b + m$ und $b - m$ zwei beliebige Punkte dieser Art und sei der Wert von $\mathfrak{U}$ auf Π_1 mit $\mathfrak{U}_1$, der auf Π_2 mit $\mathfrak{U}_2$ bezeichnet, dann ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{U}_1(b+m) &= \varepsilon\,\mathfrak{U}_1(b-m),\\ \mathfrak{U}_2(b+m) &= \delta\,\mathfrak{U}_2(b-m),\\ \mathfrak{U}_1(b+m) &= \zeta\,\mathfrak{U}_2(b-m),\end{aligned}$$

wo ε, δ, ζ gleich ± 1 sind. Man findet ihre Werte aus besonderen Lagen von m, weil $\mathfrak{U}_1$ auf Π_1, $\mathfrak{U}_2$ auf Π_2 nur in zwei Punkten unstetig wird, also ε für jede Lage vom m den nämlichen Wert hat, ebenso δ und ζ. Nun ist $\mathfrak{U}$ als ein der Fläche T zugeordneter Integrand I. Gattung dort überall stetig, wo es nicht unendlich wird; auf die Fläche T_1 bezogen ist $\mathfrak{U}$ also an den Querschnitten stetig. Da aber die Bilder zweier solcher Punkte von T_1, welche nur durch einen Querschnitt getrennt sind, gegenüberliegende Randpunkte desselben Blattes Π_1 oder Π_2 von P sind, so folgt die Gleichheit der Werte von $\mathfrak{U}$ in zwei solchen Randpunkten. Zwei solche Punkte sind aber z. B. $v = b + \frac{\omega_1}{2}$ und $v = b - \frac{\omega_1}{2}$, also ist

$$\mathfrak{U}_1\left(b+\frac{\omega_1}{2}\right) = \mathfrak{U}_1\left(b-\frac{\omega_1}{2}\right),$$

$$\mathfrak{U}_2\left(b+\frac{\omega_1}{2}\right) = \mathfrak{U}_2\left(b-\frac{\omega_1}{2}\right),$$

und da diese Punkte zu b symmetrisch liegen, so haben wir

$$\varepsilon = +1, \qquad \delta = +1.$$

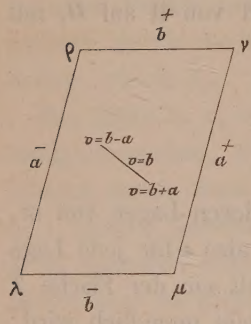
Da $\mathfrak{U}^2$ einwertige Function von v ist, $\mathfrak{U}$ aber zweiwertige, so ist überall $\mathfrak{U}_2 = -\mathfrak{U}_1$, also folgt ohne Weiteres:

$$\zeta = -1.$$

Die einwertige Function $\mathfrak{U}^2$ nimmt in der Fläche P einen gegebenen Wert an in zwei Paaren einander bedeckender Punkte, die zur Mitte $v - b = 0$ symmetrisch liegen. $\mathfrak{U}$ selbst hat gleiche Werte in zwei von diesen Punkten, wenn sie dem gleichen Blatte Π_1 oder Π_2 angehören, — entgegengesetzt gleiche Werte, wenn sie entweder einander bedecken oder zur Mitte $v - b = 0$ symmetrisch, aber nicht auf demselben Blatte liegen.

Die Anzahl der Punkte von P, in denen $\mathfrak{U}$ einen vorgeschriebenen Wert annimmt, ist also $= 2$, und diese beiden Punkte liegen auf dem nämlichen Blatte symmetrisch zur Mitte $v = b$.

§ 5.



Dies wenden wir an auf die Periodicitätsmoduln der beiden Functionen v und V an den Querschnitten von T_1 und auf den Verlauf der Function V in der Fläche P. Benutzen wir dabei die in nebenstehender Figur angedeutete Bezeichnung, so hat v an a_1 und a_2 den Periodicitätsmodul

$$\int \left| \begin{matrix} \mu \\ \overline{b} \\ \lambda \end{matrix} \right| dv = \omega_1$$

und an b_1 und b_2

$$\int \left| \begin{matrix} \varrho \\ \overline{a} \\ \lambda \end{matrix} \right| dv = \omega_2.$$

Setzen wir ferner

$$\Omega_1 = \int \left| \begin{matrix} \mu \\ \overline{b} \\ \lambda \end{matrix} \right| \mathfrak{U}_1 \, dv = - \int \left| \begin{matrix} \mu \\ \overline{b} \\ \lambda \end{matrix} \right| \mathfrak{U}_2 \, dv,$$

$$\Omega_2 = \int \left| \begin{matrix} \varrho \\ \overline{a} \\ \lambda \end{matrix} \right| \mathfrak{U}_1 \, dv = - \int \left| \begin{matrix} \varrho \\ \overline{a} \\ \lambda \end{matrix} \right| \mathfrak{U}_2 \, dv,$$

so ergeben sich für V an . . .	a_1	, b_1	, a_2	, b_2
die Periodicitätsmoduln	Ω_1	, Ω_2	, $-\Omega_1$	, $-\Omega_2$.

Wir nehmen bei $V-B$ den Verzweigungspunkt $v = a + b$ zur untern Grenze der Integration; in Folge dessen kann man die Integrationswege nach congruenten Punkten von Π_1, Π_2 so wählen, dass sie einander bedecken. Da $\mathfrak{U}$ auf solchen Wegen entgegengesetzt gleiche Werte durchläuft, so folgt für das Integral:

Die Function $V-B$ nimmt in congruenten Punkten der Fläche P entgegengesetzt gleiche Werte an.

Bezeichnet man, vom Punkte $v = a + b$ ausgehend, die rechte Seite der Doppellinie als die positive, die linke als die negative und die Werte von $\mathfrak{U}$ dem entsprechend, so hat man unter

$$\int_{a+b}^{b} \overset{+}{\mathfrak{U}}_1 \, dv = A$$

das auf Π_1 über die rechte Seite der Doppellinie erstreckte Integral zu verstehen. Da $\overset{-}{\mathfrak{U}}_1 = - \overset{+}{\mathfrak{U}}_1$ ist, folgt

$$\int_{a+b}^{b} \overset{-}{\mathfrak{U}}_1 \, dv = - A.$$

Auf Π_2 gelten die entgegengesetzten Werte.

Die Werte der Function $V-B$ in Punkten desselben Blattes Π_1 oder Π_2, welche symmetrisch zur Mitte $v = b$ liegen, stehen in sehr einfacher Beziehung. Man führe vom untern Grenzpunkte $v = a + b$ aus die Integrationswege zu beiden Seiten der Doppellinie entlang bis zur Mitte b und von hier aus symmetrisch weiter. Die Integrale über die gegenüberliegenden Seiten der Doppellinie sind, wie so eben gezeigt wurde, entgegengesetzt gleich. In den symmetrischen Wegstrecken werden successive die gleichen Werte von $\mathfrak{U}$ durchlaufen; die zugehörigen Wegelemente sind entgegengesetzt, also die hierdurch gelieferten Integralbeiträge ebenfalls entgegengesetzt gleich.

Die Function $V-B$ nimmt in solchen Punkten eines und desselben Blattes Π_1 oder Π_2 von P, welche symmetrisch zur Mitte $v = b$ liegen, entgegengesetzt gleiche Werte an.

Setzen wir also

$$v - b = v', \qquad V - B = V'$$

so hat V' in den beiden Punkten von Π_1, Π_2, welche dem nämlichen v' entsprechen, also einander bedecken, entgegengesetzt gleiche Werte, ebenso in zwei Punkten $\pm v'$ des nämlichen Blattes Π_1 oder Π_2, welche zur Mitte $v' = v - b = 0$ symmetrisch liegen.

Es ist hiernach, wenn der zu Π_1 gehörige Wert von V' durch den Index 1 bezeichnet wird,

$$V'_1\left(b + \frac{\omega_1}{2}\right) = - V'_1\left(b - \frac{\omega_1}{2}\right).$$

Nun haben wir oben gesetzt:

$$V_1\left(b + \frac{\omega_1}{2}\right) - V_1\left(b - \frac{\omega_1}{2}\right) = \Omega_1,$$

das ist auch

$$V'_1\left(b + \frac{\omega_1}{2}\right) - V'_1\left(b - \frac{\omega_1}{2}\right) = \Omega_1;$$

somit folgt

$$V'_1\left(b + \frac{\omega_1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\Omega_1,$$

ebenso

$$V'_1\left(b + \frac{\omega_2}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\Omega_2,$$

und

$$V'_1\left(b + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\Omega_1 + \Omega_2\right),$$

was im Folgenden (§ 12) zur Anwendung kommen wird.

Zweiter Teil.

Die Riemannsche Theta-Function.

§ 6.

Wir können jetzt zur Herstellung und Untersuchung derjenigen Riemannschen ϑ-Function, welche unserm Falle entspricht, übergehen. Dazu bedürfen wir der sogenannten Normalintegrale I. Gattung u_1, u_2, welche definiert sind durch die Forderung, dass

$$\text{an } a_1 : \overset{+}{u}_1 - \overset{-}{u}_1 = \pi i, \quad \overset{+}{u}_2 - \overset{-}{u}_2 = 0$$

$$\text{» } a_2 : \overset{+}{u}_1 - \overset{-}{u}_1 = 0, \quad \overset{+}{u}_2 - \overset{-}{u}_2 = \pi i$$

sein soll. Ist dann

$$\text{an } b_\lambda : \overset{+}{u}_\mu - \overset{-}{u}_\mu = a_{\lambda\mu}$$

so ist

$$a_{\lambda\mu} = a_{\mu\lambda}$$

und der reelle Teil von

$$a_{11} m^2 + 2 a_{12} mn + a_{22} n^2$$

ist bei reellen Argumenten m, n eine vollständige negative quadratische Form. (Riemanns *Theorie d. A. F.* § 20, 21.)

Da

$$\text{an } a_1 : \overset{+}{v} - \overset{-}{v} = \omega_1, \quad \overset{+}{V} - \overset{-}{V} = \Omega_1$$

$$\text{an } a_2 : \overset{+}{v} - \overset{-}{v} = \omega_1, \quad \overset{+}{V} - \overset{-}{V} = -\Omega_1$$

ist, so folgt sofort

$$v = \frac{\omega_1}{\pi i}(u_1 + u_2), \quad V = \frac{\Omega_1}{\pi i}(u_1 - u_2),$$

und hieraus

$$u_1 = \frac{\pi i}{2}\left(\frac{v}{\omega_1} + \frac{V}{\Omega_1}\right), \quad u_2 = \frac{\pi i}{2}\left(\frac{v}{\omega_1} - \frac{V}{\Omega_1}\right).$$

Diese Ausdrücke liefern die Periodicitätsmoduln an b_1 und b_2.

Da nämlich

$$\text{an } b_1 : \overset{+}{v} - \overset{-}{v} = \omega_2, \quad \overset{+}{V} - \overset{-}{V} = \Omega_2,$$

$$\text{» } b_2 : \overset{+}{v} - \overset{-}{v} = \omega_2, \quad \overset{+}{V} - \overset{-}{V} = -\Omega_2,$$

so folgt

$$a_{11} = a_{22} = \frac{\pi i}{2}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{\pi i}{2}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - \frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right).$$

§ 7.

Der Exponent im allgemeinen Gliede der Riemannschen ϑ-Reihe

$$a_{11}\, m^2 + 2\, a_{12}\, mn + a_{22}\, n^2 + 2\, mu_1 + 2\, nu_2$$

geht hiernach über in

$$\frac{\pi i}{2}\,\frac{\omega_2}{\omega_1}\,(m+n)^2 + \frac{\pi i}{2}\,\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\,(m-n)^2 + \frac{\pi v i}{\omega_1}\,(m+n) + \frac{\pi V i}{\Omega_1}\,(m-n).$$

Zu besserer Uebersicht sei folgende Bezeichnung eingeführt:

$$\frac{\pi i}{2}\,\frac{\omega_2}{\omega_1}\,(m+n)^2 + \frac{\pi v i}{\omega_1}\,(m+n) = \Big[m+n \mid v\Big],$$

$$\frac{\pi i}{2}\,\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\,(m-n)^2 + \frac{\pi V i}{\Omega_1}\,(m-n) = \Big(m-n \mid V\Big),$$

dann lautet die Riemannsche ϑ-Reihe:

$$\vartheta\,(u_1 \mid u_2) = \sum_m \sum_n e^{[m+n \mid v] + (m-n \mid V)},$$

wo beide Summationen unabhängig von einander von $-\infty$ bis $+\infty$ geben.

Offenbar zerfällt dies in zwei Produkte unendlicher Reihen. Da $m+n$ und $m-n$ bei der Division durch 2 gleiche Reste lassen, so liefert ein Wertepaar m, n entweder zwei gerade Zahlen $m+n = 2\mu$, $m-n = 2\nu$, oder zwei ungerade, $m+n = 2\varkappa+1$, $m-n = 2\lambda+1$. Ferner ergibt sich jedes Wertepaar 2μ, 2ν, bezw. $2\varkappa+1$, $2\lambda+1$, und zwar jedes nur einmal, jenes für $m = \mu+\nu$, $n = \mu-\nu$, dieses für $m = \varkappa+\lambda+1$, $n = \varkappa-\lambda$. Werden daher bei der Summation zuerst alle Wertpaare 2μ, 2ν genommen, jedes nur einmal, und hierauf alle Wertpaare $2\varkappa+1$, $2\lambda+1$, wiederum jedes nur einmal, so wird auch jedes Wertpaar m, n, und zwar jedes nur einmal berücksichtigt. Somit folgt:

$$\vartheta\,(u_1 \mid u_2) = \sum_\mu e^{[2\mu \mid v]} \sum_\nu e^{(2\nu \mid V)} + \sum_\varkappa e^{[2\varkappa+1 \mid v]} \sum_\lambda e^{(2\lambda+1 \mid V)},$$

wo jede Summation von $-\infty$ bis $+\infty$ geht. Dies sind lauter JACOBIsche ϑ-Reihen. Bezeichnen wir für die Periodicitätsmoduln ω_1, ω_2 durch

$$\vartheta_{\mu\nu}(v \mid \omega_1, \omega_2)$$

diejenige der vier JACOBIschen Functionen ϑ, ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, welche für

$$v = \frac{\mu\omega_1 + \nu\omega_2}{2}$$

verschwindet, so ist

$$\sum_{\mu} e^{[2\mu \mid v]} = \vartheta_{11}(v \mid \omega_1, 2\omega_2),$$

$$\sum_{\nu} e^{(2\nu \mid V)} = \vartheta_{11}(V \mid \Omega_1, 2\Omega_2),$$

$$\sum_{\varkappa} e^{[2\varkappa+1 \mid v]} = \vartheta_{10}(v \mid \omega_1, 2\omega_2),$$

$$\sum_{\lambda} e^{(2\lambda+1 \mid V)} = \vartheta_{10}(V \mid \Omega_1, 2\Omega_1),$$

und man erhält:

$$\vartheta(u_1 \mid u_2) = \vartheta_{11}(v \mid \omega_1, 2\omega_2)\,\vartheta_{11}(V \mid \Omega_1, 2\Omega_2) + \vartheta_{10}(v \mid \omega_1, 2\omega_2)\,\vartheta_{10}(V \mid \Omega_1, 2\Omega_2).$$

§ 8.

Um die Nullpunkte der ϑ-Function zur Evidenz bringen zu können, führen wir die neuen Argumente $u_1 - e_1$, $u_2 - e_2$ ein, wo e_1 und e_2 Constanten sind:

$$\vartheta(u_1 - e_1 \mid u_2 - e_2)$$
$$= \vartheta_{11}(v - f \mid \omega_1, 2\omega_2)\,\vartheta_{11}(V - F \mid \Omega_1, 2\Omega_2) + \vartheta_{10}(v - f \mid \omega_1, 2\omega_2)\,\vartheta_{10}(V - F \mid \Omega_1, 2\Omega_2).$$

Wir haben

$$u_1 = \frac{\pi i}{2}\left(\frac{v}{\omega_1} + \frac{V}{\Omega_1}\right), \quad u_2 = \frac{\pi i}{2}\left(\frac{v}{\omega_1} - \frac{V}{\Omega_1}\right);$$

es wird also

$$e_1 = \frac{\pi i}{2}\left(\frac{f}{\omega_1} + \frac{F}{\Omega_1}\right), \quad e_2 = \frac{\pi i}{2}\left(\frac{f}{\omega_1} - \frac{F}{\Omega_1}\right),$$

und somit

$$f = \frac{\omega_1}{\pi i}(e_1 + e_2), \quad F = \frac{\Omega_1}{\pi i}(e_1 - e_2).$$

Sind nun ε_1 und ε_2 die Nullpunkte der ϑ-Function, so ist nach RIEMANN (S. «Ueber das Verschwinden der ϑ-Functionen», § 1)

$$e_1 \equiv u_1(\varepsilon_1) + u_1(\varepsilon_2) + C_1,$$
$$e_2 \equiv u_2(\varepsilon_1) + u_2(\varepsilon_2) + C_2,$$

wo die Congruenz auf die Modulsysteme von u_1 und u_2 zu beziehen ist. Die Constanten C_1 und C_2 sind völlig unabhängig, sowohl von der Lage der Nullpunkte ε_1 und ε_2, als auch von den Werten der Variablen u_1 und u_2. Schreibt man statt der Congruenz eine Gleichung, so entspricht dieser Aenderung des Argumentes eine neue ϑ-Function, welche der vorigen proportional ist. Der Proportionalitätsfactor ist eine Exponentialgrösse, welche nicht verschwindet; die neue ϑ-Function hat also dieselben Nullpunkte, wie die vorige. Da es sich hier wesentlich um die Nullpunkte handelt, nehmen wir auf die Exponentialgrösse keine Rücksicht und untersuchen die Function

$$\vartheta\left((u_\mu(o) - u_\mu(\varepsilon_1) - u_\mu(\varepsilon_2) - C_\mu)\right).$$

Um hierfür den Ausdruck in Jacobischen ϑ-Functionen zu gewinnen, haben wir

$$\frac{\pi i}{\omega_1} f = u_1(\varepsilon_1) + u_2(\varepsilon_1) + u_1(\varepsilon_2) + u_2(\varepsilon_2) + C_1 + C_2$$

$$\frac{\pi i}{\Omega_1} F = u_1(\varepsilon_1) - u_2(\varepsilon_1) + u_1(\varepsilon_2) - u_2(\varepsilon_2) + C_1 - C_2.$$

Nun ist nach § 6

$$u_1 + u_2 = \frac{\pi i}{\omega_1} v, \quad u_1 - u_2 = \frac{\pi i}{\Omega_1} V,$$

also

$$f = v(\varepsilon_1) + v(\varepsilon_2) + k, \qquad \text{wo } k = \frac{\omega_1}{\pi i}(C_1 + C_2) \text{ ist},$$

$$F = V(\varepsilon_1) + V(\varepsilon_2) + K, \qquad \text{wo } K = \frac{\Omega_1}{\pi i}(C_1 - C_2) \text{ ist}.$$

Wir haben somit:

$$\vartheta\left(u_1(o) - u_1(\varepsilon_1) - u_1(\varepsilon_2) - C_1 \mid u_2(o) - u_2(\varepsilon_1) - u_2(\varepsilon_2) - C_2\right) =$$
$$\vartheta_{10}\left(v(o) - v(\varepsilon_1) - v(\varepsilon_2) - k \mid \omega_1, 2\omega_2\right) \vartheta_{10}\left(V(o) - V(\varepsilon_1) - V(\varepsilon_2) - K \mid \Omega_1, 2\Omega_2\right)$$
$$+ \vartheta_{11}\left(v(o) - v(\varepsilon_1) - v(\varepsilon_2) - k \mid \omega_1, 2\omega_2\right) \vartheta_{11}\left(V(o) - V(\varepsilon_1) - V(\varepsilon_2) - K \mid \Omega_1, 2\Omega_2\right).$$

Dritter Teil.

Die Constanten der Theta-Function

und der Satz vom identischen Verschwinden der letztern.

§ 9.

Die Function

$$\vartheta\left(\left(u_\mu(o) - u_\mu(\varepsilon_1) - u_\mu(\varepsilon_2) - C_\mu\right)\right)$$

ist nach RIEMANN (ABELsche Functionen § 23) in allen denjenigen Fällen identisch Null (d. h.: $= 0$ für alle Lagen des variablen Punktes o), in welchen die vorgeschriebenen Nullpunkte ε_1 und ε_2 ein Punktsystem I. Gattung bilden. Unter einem solchen verstehen wir die Nullpunkte einer Function erster Gattung, oder, was dasselbe ist, des Quotienten zweier Integranden I. Gattung. Die Anzahl dieser Nullpunkte ist höchstens $= 2p - 2$, also in unserm Falle $= 2$. Der allgemeine Ausdruck für ein Integral I. Gattung ist

$$w = x_1 v + x_2 V,$$

wo x_1 und x_2 willkürliche Constanten bedeuten. Es ist dann u. A.

$$\frac{dw}{dv} = x_1 + x_2 \mathfrak{U}$$

Function I. Gattung. Nimmt man x_1 so an, dass ε Nullpunkt dieser Function wird, so ist der zweite Nullpunkt ε' bestimmt. Es muss sein:

$$\mathfrak{U}(\varepsilon') = \mathfrak{U}(\varepsilon),$$

d. h. (nach § 4) ε' liegt in Bezug auf $v = b$ symmetrisch zu ε auf demselben Blatt der Fläche P. Es ist also:

$$v(\varepsilon) + v(\varepsilon') = 2b,$$

und nach § 5

$$V(\varepsilon) + V(\varepsilon') = 2B.$$

§ 10.

Die RIEMANNsche ϑ-Function bleibt unverändert, wenn die Argumente ihre Zeichen wechseln, es ist also:

$$\vartheta\left(\left(u_\mu(o) - u_\mu(\varepsilon_1) - u_\mu(\varepsilon_2) - C_\mu\right)\right) = \vartheta\left(\left(u_\mu(\varepsilon_1) - u_\mu(o) + u_\mu(\varepsilon_2) + C_\mu\right)\right).$$

Führt man links statt ε_1 den Punkt ε'_2 ein, welcher mit ε_2 ein Punktsystem I. Gattung bildet, so verschwindet die ϑ-Function für jede Lage des Punktes o. Daraus folgt für den rechts stehenden ϑ-Ausdruck, wenn man ihn als Function der Lage von ε_1 betrachtet, dass er $= 0$ wird, wenn ε_1 mit o und wenn ε_1 mit ε'_2 zusammenfällt. Eine ϑ-Function mit den Nullpunkten o und ε'_2 ist aber folgendermassen zu schreiben:

$$\vartheta\left(\left(u_\mu(\varepsilon_1) - u_\mu(o) - u_\mu(\varepsilon'_2) - C_\mu\right)\right).$$

Daraus folgt:

$$u_\mu(\varepsilon_1) - u_\mu(o) + u_\mu(\varepsilon_2) + C_\mu = u_\mu(\varepsilon_1) - u_\mu(o) - u_\mu(\varepsilon'_2) - C_\mu + (g, h)_\mu,$$

wo

$$(g, h)_\mu = g_\mu \pi i + h_1 a_{1\mu} + h_2 a_{2\mu}$$

ist und g_1, g_2, h_1, h_2 ganze Zahlen bedeuten. Es ist demnach

$$u_\mu(\varepsilon_2) + u_\mu(\varepsilon'_2) + 2C_\mu = (g, h)_\mu.$$

Wie im vorigen Paragraphen gezeigt wurde, bilden zwei Punkte ein System I. Gattung, wenn sie auf demselben Blatte Π_1, Π_2 von P symmetrisch zu $v—b$ liegen; die Werte von $V—B$ für solche Punkte sind entgegengesetzt gleich. Nun ist nach § 6

$$u_1 = \frac{\pi i}{2}\left(\frac{v}{\omega_1} + \frac{V}{\Omega_1}\right), \quad u_2 = \frac{\pi i}{2}\left(\frac{v}{\omega_1} - \frac{V}{\Omega_1}\right).$$

Also

$$u_1(\varepsilon_2) + u_1(\varepsilon'_2) = \frac{\pi i}{2}\left(\frac{v(\varepsilon_2) + v(\varepsilon'_2)}{\omega_1} + \frac{V(\varepsilon_2) + V(\varepsilon'_2)}{\Omega_1}\right)$$

und dies wird

$$= \pi i\left(\frac{b}{\omega_1} + \frac{B}{\Omega_1}\right).$$

Ebenso folgt

$$u_2(\varepsilon_2) + u_2(\varepsilon'_2) = \pi i\left(\frac{b}{\omega_1} - \frac{B}{\Omega_1}\right).$$

Demnach ist

$$\pi i\left(\frac{b}{\omega_1} + \frac{B}{\Omega_1}\right) + 2C_1 = (g, h)_1,$$

$$\pi i\left(\frac{b}{\omega_1} - \frac{B}{\Omega_1}\right) + 2C_2 = (g, h)_2,$$

also

$$C_1 = \frac{1}{2}(g, h)_1 - \frac{\pi i}{2}\left(\frac{b}{\omega_1} + \frac{B}{\Omega_1}\right)$$

$$C_2 = \frac{1}{2}(g, h)_2 - \frac{\pi i}{2}\left(\frac{b}{\omega_1} - \frac{B}{\Omega_1}\right).$$

Da die ganzzahligen Teile von C_1 und C_2 auf die Nullpunkte der ϑ-Function keinen Einfluss haben, führen wir in die fernere Rechnung nur diejenigen Werte von C_1 und C_2 ein, welche sich ergeben, wenn man für g_1, g_2, h_1, h_2 nur die Zahlen 0 und 1 zulässt.

Es sind nun zunächst die Werte von k und K zu berechnen. Wir haben gesetzt:

$$k = \frac{\omega_1}{\pi i}(C_1 + C_2), \quad K = \frac{\Omega_1}{\pi i}(C_1 - C_2),$$

also folgt

$$k = \frac{\omega_1}{2\pi i}\left[(g_1 + g_2)\,\pi i + h_1(a_{11} + a_{12}) + h_2(a_{21} + a_{22})\right] - b$$

$$K = \frac{\Omega_1}{2\pi i}\left[(g_1 - g_2)\,\pi i + h_1(a_{11} - a_{12}) + h_2(a_{21} - a_{22})\right] - B.$$

Nun ergibt sich aus den Werten von a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} (s. § 6)

$$a_{11} + a_{12} = a_{22} + a_{21} = \pi i \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

$$a_{11} - a_{12} = a_{22} - a_{21} = \pi i \frac{\Omega_2}{\Omega_1};$$

somit folgt:

$$k = \frac{g_1 + g_2}{2}\omega_1 + \frac{h_1 + h_2}{2}\omega_2 - b,$$

$$K = \frac{g_1 - g_2}{2}\Omega_1 + \frac{h_1 - h_2}{2}\Omega_2 - B,$$

und die ϑ-Function mit den Nullpunkten ε_1 und ε_2 drückt sich, wie folgt, aus:

$$\vartheta\left(u_1(o) - u_1(\varepsilon_1) - u_1(\varepsilon_2) + \frac{\pi i}{2}\left(\frac{b}{\omega_1} + \frac{B}{\Omega_1}\right) - (g, h)_1 \;\middle|\; u_2(o) - u_2(\varepsilon_1) - u_2(\varepsilon_2) + \frac{\pi i}{2}\left(\frac{b}{\omega_1} - \frac{B}{\Omega_1}\right) - \frac{1}{2}(g, h)_2\right) =$$

$$\sum_{\nu=0}^{1} \vartheta_{1\nu}\left(v(o) - v(\varepsilon_1) - v(\varepsilon_2) + b - \frac{g_1 + g_2}{2}\omega_1 - \frac{h_1 + h_2}{2}\omega_2 \;\middle|\; \omega_1, 2\omega_2\right)$$

$$\cdot\, \vartheta_{1\nu}\left(V(o) - V(\varepsilon_1) - V(\varepsilon_2) + B - \frac{g_1 - g_2}{2}\Omega_1 - \frac{h_1 - h_2}{2}\Omega_2 \;\middle|\; \Omega_1, 2\Omega_2\right).$$

§ 11.

Führt man in die vorstehende Gleichung für ε_1 und ε_2 ein Punktsystem erster Gattung ein, so wird

$$v(\varepsilon_1) + v(\varepsilon_2) = 2b, \quad V(\varepsilon_1) + V(\varepsilon_2) = 2B;$$

die linke Seite verschwindet und man erhält:

$$0 = \sum_{\nu=0}^{1} \vartheta_{1\nu}\left(v - b - \frac{g_1+g_2}{2}\omega_1 - \frac{h_1+h_2}{2}\omega_2 \,\middle|\, \omega_1, 2\omega_2\right)$$

$$\cdot \vartheta_{1\nu}\left(V - B - \frac{g_1-g_2}{2}\Omega_1 - \frac{h_1-h_2}{2}\Omega_2 \,\middle|\, \Omega_1, 2\Omega_2\right).$$

Wir setzen zur besseren Uebersicht

$$v - b = v', \quad V - B = V',$$

und haben dann:

$$\vartheta_{10}\left(v' - \frac{g_1+g_2}{2}\omega_1 - \frac{h_1+h_2}{2}\omega_2 \,\middle|\, \omega_1, 2\omega_2\right)\vartheta_{10}\left(V' - \frac{g_1-g_2}{2}\Omega_1 - \frac{h_1-h_2}{2}\Omega_2 \,\middle|\, \Omega_1, 2\Omega_2\right) =$$

$$-\vartheta_{11}\left(v' - \frac{g_1+g_2}{2}\omega_1 - \frac{h_1+h_2}{2}\omega_1 \,\middle|\, \omega_1, 2\omega_2\right)\vartheta_{11}\left(V' - \frac{g_1-g_2}{2}\Omega_1 - \frac{h_1-h_2}{2}\Omega_2 \,\middle|\, \Omega_1, 2\Omega_2\right).$$

Zu jedem Werte von $v' = v - b$ gehören zwei Werte von $V - B = V'$, und diese sind (s. § 5) entgegengesetzt gleich. Die vorstehende Gleichung muss also auch gelten, wenn V' sein Zeichen wechselt. Beachtet man, dass ϑ_{10} und ϑ_{11} gerade Functionen sind, so erhält man:

$$\vartheta_{10}\left(v' - \frac{g_1+g_2}{2}\omega_1 - \frac{h_1+h_2}{2}\omega_2 \,\middle|\, \omega_1, 2\omega_2\right)\vartheta_{10}\left(V' + \frac{g_1-g_2}{2}\Omega_1 + \frac{h_1-h_2}{2}\Omega_2 \,\middle|\, \Omega_1, 2\Omega_2\right) =$$

$$-\vartheta_{11}\left(v' - \frac{g_1+g_2}{2}\omega_1 - \frac{h_1+h_2}{2}\omega_2 \,\middle|\, \omega_1, 2\omega_2\right)\vartheta_{11}\left(V' + \frac{g_1-g_2}{2}\Omega_1 + \frac{h_1-h_2}{2}\Omega_2 \,\middle|\, \Omega_1, 2\Omega_2\right).$$

Dividiert man jetzt die vorletzte Gleichung durch die letzte, so fallen die Ausdrücke welche v' enthalten, weg, und wenn man setzt

$$V' - \frac{g_1-g_2}{2}\Omega_1 - \frac{h_1-h_2}{2}\Omega_2 = W,$$

dann wird

$$V' + \frac{g_1-g_2}{2}\Omega_1 - \frac{h_1-h_2}{2}\Omega_2 = W + (g_1-g_2)\Omega_1 + (h_1-h_2)\Omega_2,$$

und man erhält

$$\frac{\vartheta_{10}(W \mid \Omega_1, 2\Omega_2)}{\vartheta_{11}(W \mid \Omega_1, 2\Omega_2)} = \frac{\vartheta_{10}(W + (g_1-g_2)\Omega_1 + (h_1-h_2)\Omega_2 \mid \Omega_1, 2\Omega_2)}{\vartheta_{11}(W + (g_1-g_2)\Omega_1 + (h_1-h_2)\Omega_2 \mid \Omega_1, 2\Omega_2)}.$$

Weder rechts noch links hat der Zähler einen Nullpunkt mit dem Nenner gemein; es müssen also die beiden Zähler gleiche Nullpunkte haben und ebenso die beiden Nenner. Folglich muss sein:

$$\frac{\Omega_1}{2} + m\,\Omega_1 + n\,2\Omega_2 = \frac{\Omega_1}{2} + (g_1 - g_2)\,\Omega_1 + (h_1 - h_2)\,\Omega_2.$$

Es ist also $h_1 - h_2 = 2n$, einer geraden Zahl, und somit

$$\underline{h_1 = h_2 = h.}$$

Aus den Argumenten der ϑ-Functionen verschwinden demnach die Glieder, welche mit $h_1 - h_2$ multiplicirt sind, und wenn man den folgenden Satz anwendet:

$$\vartheta_{\mu\nu}(w + m\omega_1 \,|\, \omega_1, \omega_2) = (-1)^{(1-\nu)\,m}\, \vartheta_{\mu\nu}(w \,|\, \omega_1, \omega_2),$$

so erhält man

$$\frac{\vartheta_{10}(W \,|\, \Omega_1, 2\Omega_2)}{\vartheta_{11}(W \,|\, \Omega_1, 2\Omega_2)} = (-1)^{g_1 - g_2}\, \frac{\vartheta_{10}(W \,|\, \Omega_1, 2\Omega_2)}{\vartheta_{11}(W \,|\, \Omega_1, 2\Omega_2)}$$

$$1 = (-1)^{g_1 - g_2}$$

$$\underline{g_1 = g_2 = g.}$$

Kehren wir jetzt zu der ursprünglichen Gleichung zurück, so erhalten wir

$$\vartheta_{10}(v' - g\omega_1 - h\omega_2 \,|\, \omega_1, 2\omega_2)\, \vartheta_{10}(V' \,|\, \Omega_1, 2\Omega_2) +$$
$$\vartheta_{11}(v' - g\omega_1 - h\omega_2 \,|\, \omega_1, 2\omega_2)\, \vartheta_{11}(V' \,|\, \Omega_1, 2\Omega_2) = 0$$

oder

$$\vartheta_{10}(v' - h\omega_2 \,|\, \omega_1, 2\omega_2)\, \vartheta_{10}(V' \,|\, \Omega_1, 2\Omega_2) + (-1)^g\, \vartheta_{11}(v' - h\omega_2 \,|\, \omega_1, 2\omega_2)\, \vartheta_{11}(V' \,|\, \Omega_1, 2\Omega_2) = 0.$$

Nun wird für $v - b = \frac{\omega_1}{2}$ nach § 5 $V - B = \frac{\Omega_1}{2}$. Aber für $V' = \frac{\Omega_1}{2}$ wird $\vartheta_{10}(V' \,|\, \Omega_1, 2\Omega_2) = 0$, während $\vartheta_{11}(V' \,|\, \Omega_1, 2\Omega_2)$ von Null verschieden bleibt. Soll also die letzte Gleichung keinen Widerspruch enthalten, so muss

$$\vartheta_{11}\left(\frac{\omega_1}{2} - h\omega_2 \,|\, \omega_1, 2\omega_2\right) = 0$$

sein, also

$$\underline{\underline{h = 1.}}$$

Jetzt haben wir:

$$\frac{\vartheta_{10}(v' - \omega_2 \,|\, \omega_1, 2\omega_2)}{\vartheta_{11}(v' - \omega_2 \,|\, \omega_1, 2\omega_2)} \cdot \frac{\vartheta_{10}(V' \,|\, \Omega_1, 2\Omega_2)}{\vartheta_{11}(V' \,|\, \Omega_1, 2\Omega_2)} = (-1)^{g-1}.$$

§ 12.

Die Theorie der Jacobischen ϑ-Function liefert folgende Gleichung:

$$\vartheta_{1\nu}\left(v - \frac{\omega_2}{2} \,|\, \omega_1, \omega_2\right) = e^{-\frac{\pi\,\omega_2\,i}{4\,\omega_1} + \frac{\pi\,vi}{\omega_1}}\, \vartheta_{1,\,\nu+1}(v \,|\, \omega_1, \omega_2). \qquad \text{(F)}$$

Der ausgeschiedene Exponentialfactor ist von v unabhängig, er hebt sich also in unserm Fall weg, und mit Rücksicht auf den Satz

$$\vartheta_{12}(v) = \vartheta_{10}(v)$$

erhält man:

$$\frac{\vartheta_{11}(v' \mid \omega_1, 2\omega_2)}{\vartheta_{10}(v' \mid \omega_1, 2\omega_2)} \cdot \frac{\vartheta_{10}(V' \mid \Omega_1, 2\Omega_2)}{\vartheta_{11}(V' \mid \Omega_1, 2\Omega_2)} = (-1)^{g-1}. \qquad \text{(G)}$$

Führt man nun zwei specielle zusammengehörige Werte von v' und V' ein (vergl. § 5), nämlich

$$v' = v - b = \frac{\omega_2}{2}, \quad V' = V - B = \frac{\Omega_2}{2},$$

so ergibt sich:

$$\frac{\vartheta_{11}\left(\frac{\omega_2}{2} \mid \omega_1, 2\omega_2\right)}{\vartheta_{10}\left(\frac{\omega_2}{2} \mid \omega_1, 2\omega_2\right)} \cdot \frac{\vartheta_{10}\left(\frac{\Omega_2}{2} \mid \Omega_1, 2\Omega_2\right)}{\vartheta_{11}\left(\frac{\Omega_2}{2} \mid \Omega_1, 2\Omega_2\right)} = (-1)^{g-1}.$$

Es ist nun leicht zu zeigen, dass beide ϑ-Quotienten gleich Eins sind. Setzt man nämlich in der Formel (F) $\nu = 0$, $v = \frac{\omega_2}{4}$, so lautet sie

$$\vartheta_{10}\left(-\frac{\omega_2}{4} \mid \omega_1, \omega_2\right) = \vartheta_{11}\left(\frac{\omega_2}{4} \mid \omega_1, \omega_2\right).$$

Da ϑ_{10} gerade Function ist, so folgt durch Verdoppelung von ω_2:

$$\vartheta_{10}\left(\frac{\omega_2}{2} \mid \omega_1, 2\omega_2\right) = \vartheta_{11}\left(\frac{\omega_2}{2} \mid \omega_1, 2\omega_2\right),$$

und ebenso ist

$$\vartheta_{10}\left(\frac{\Omega_2}{2} \mid \Omega_1, 2\Omega_2\right) = \vartheta_{11}\left(\frac{\Omega_2}{2} \mid \Omega_1, 2\Omega_2\right).$$

Also haben wir

$$1 = (-1)^{g-1}$$

d. i.:

$$\underline{\underline{g = 1.}}$$

Unsere Resultate sind somit

$$g_1 = g_2 = 1, \quad h_1 = h_2 = 1,$$

und nun lautet der vollständig ausgearbeitete Ausdruck für die Riemannsche ϑ-Function mit den Nullpunkten ε_1, ε_2 für unsern Fall:

$$\vartheta\left(u_1(o)-u_1(\varepsilon_1)-u_1(\varepsilon_2)+\frac{\pi i}{2}\left(\frac{b}{\omega_1}+\frac{B}{\Omega_1}\right)-\frac{1}{2}(\pi i+a_{11}+a_{12})\right|$$

$$u_2(o)-u_2(\varepsilon_1)-u_2(\varepsilon_2)+\frac{\pi i}{2}\left(\frac{b}{\omega_1}-\frac{B}{\Omega_1}\right)-\frac{1}{2}(\pi i+a_{12}+a_{22})\Big)$$

$$=\vartheta_{10}(v(o)-v(\varepsilon_1)-v(\varepsilon_2)+b-\omega_1-\omega_2\,|\,\omega_1,2\omega_2)\,\vartheta_{10}(V(o)-V(\varepsilon_1)-V(\varepsilon_2)+B\,|\,\Omega_1,2\Omega_2)$$

$$+\vartheta_{11}(v(o)-v(\varepsilon_1)-v(\varepsilon_2)+b-\omega_1-\omega_2\,|\,\omega_1,2\omega_2)\,\vartheta_{11}(V(o)-V(\varepsilon_1)-V(\varepsilon_2)+B\,|\,\Omega_1,2\Omega_2) \qquad \text{(II)}$$

und der RIEMANNsche Lehrsatz vom identischen Verschwinden solcher Ausdrücke liefert, wenn in obiger Gleichung (G) der gefundene Wert $g=1$ gesetzt wird und man für v', V' ihre Werte $v-b$, $V-B$ wieder einführt, die Gleichung:

$$\frac{\vartheta_{11}(v-b\,|\,\omega_1,2\omega_2)}{\vartheta_{10}(v-b\,|\,\omega_1,2\omega_2)}=\frac{\vartheta_{11}(V-B\,|\,\Omega_1,2\Omega_2)}{\vartheta_{10}(V-B\,|\,\Omega_1,2\Omega_2)}.$$

§ 13.

Der Ausdruck für die ϑ-Function lässt sich noch etwas vereinfachen, wenn man die folgende Formel anwendet:

$$\vartheta\left(\left(w_\mu-\frac{1}{2}(g,h)_\mu\right)\right)$$

$$=e^{-\frac{1}{4}(a_{11}h_1^2+2a_{12}h_1h_2+a_{22}h_2^2)+\frac{\pi i}{2}\sum_1^p g_\mu h_\mu+\sum_1^p h_\mu w_\mu}\,\vartheta\left|\begin{matrix}g_1&g_2\\h_1&h_2\end{matrix}\right|\left(\left(w_\mu\right)\right).$$

Wir haben zu setzen

$$g_1=g_2=h_1=h_2=1,$$

und

$$a_{11}=a_{22}=\frac{\pi i}{2}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}+\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right),$$

$$a_{12}=a_{21}=\frac{\pi i}{2}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}-\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right),$$

das gibt

$$\frac{1}{4}\left(a_{11}h_1^2+2a_{12}h_1h_2+a_{22}h_2^2\right)=\frac{\pi i}{2}\,\frac{\omega_2}{\omega_1},$$

und

$$\frac{\pi i}{2}\sum_1^p g_\mu h_\mu=\pi i.$$

Ferner ist einzuführen

$$w_1 = u_1(o) - u_1(\varepsilon_1) - u_1(\varepsilon_2) + \frac{\pi i}{2}\left(\frac{b}{\omega_1} + \frac{B}{\Omega_1}\right),$$

$$w_2 = u_2(o) - u_2(\varepsilon_1) - u_2(\varepsilon_2) + \frac{\pi i}{2}\left(\frac{b}{\omega_1} - \frac{B}{\Omega_1}\right),$$

woraus folgt

$$\sum_1^p h_\mu w_\mu = w_1 + w_2 = \frac{\pi i}{\omega_1}\,(v(o) - v(\varepsilon_1) - v(\varepsilon_2) + b).$$

Wir haben also, wenn wir zur Abkürzung w_1, w_2 beibehalten:

$$\vartheta\left(\left(w_\mu - \frac{1}{2}(g,h)_\mu\right)\right) = -e^{-\frac{\pi\omega_2 i}{\omega_1} + \frac{\pi i}{\omega_1}(v(o) - v(\varepsilon_1) - v(\varepsilon_2) + b)}\,\vartheta\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}(w_1 \mid w_2).$$

Auf die Jacobischen ϑ-Functionen der rechten Seite unserer Gleichung (H) kann man folgende Sätze anwenden:

$$\vartheta_{\mu\nu}(v - \omega_1 \mid \omega_1, \omega_2) = (-1)^{\nu-1}\,\vartheta_{\mu\nu}(v \mid \omega_1, \omega_2)$$

und

$$\vartheta_{1\nu}\left(v - \frac{\omega_2}{2} \mid \omega_1, \omega_2\right) = e^{-\frac{\pi\omega_2 i}{4\omega_1} + \frac{\pi v i}{\omega_1}}\,\vartheta_{1,\nu+1}(v \mid \omega_1, \omega_2).$$

Dabei erhält man den nämlichen Exponentialausdruck, wie eben, multiplicirt mit:
$\vartheta_{11}(v(o) - v(\varepsilon_1) - v(\varepsilon_2) + b \mid \omega_1, 2\omega_2)\,\vartheta_{10}(V(o) - V(\varepsilon_1) - V(\varepsilon_2) + B \mid \Omega_1, 2\Omega_2) -$
$\vartheta_{10}(v(o) - v(\varepsilon_1) - v(\varepsilon_2) + b \mid \omega_1, 2\omega_2)\,\vartheta_{11}(V(o) - V(\varepsilon_1) - V(\varepsilon_2) + B \mid \Omega_1, 2\Omega_2)$.
So erhalten wir die folgende Gleichung:

$$\vartheta\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}(w_1 \mid w_2) =$$

$$\vartheta_{11}(v(o) - v(\varepsilon_1) - v(\varepsilon_2) + b \mid \omega_1, 2\omega_2)\,\vartheta_{10}(V(o) - V(\varepsilon_1) - V(\varepsilon_2) + B \mid \Omega_1, 2\Omega_2)$$
$$- \vartheta_{10}(v(o) - v(\varepsilon_1) - v(\varepsilon_2) + b \mid \omega_1, 2\omega_2)\,\vartheta_{11}(V(o) - V(\varepsilon_1) - V(\varepsilon_2) + B \mid \Omega_1, 2\Omega_2),$$

für

$$w_1 = u_1(o) - u_1(\varepsilon_1) - u_1(\varepsilon_2) + \frac{\pi i}{2}\left(\frac{b}{\omega_1} + \frac{B}{\Omega_1}\right),$$

$$w_2 = u_2(o) - u_2(\varepsilon_1) - u_2(\varepsilon_2) + \frac{\pi i}{2}\left(\frac{b}{\omega_1} - \frac{B}{\Omega_1}\right),$$

und die folgenden Sätze:

1) Wofern die Punkte ε_1 und ε_2 kein System I. Gattung bilden, verschwindet die Function

(a) $\vartheta \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \left(u_1(o) - u_1(\varepsilon_1) - u_1(\varepsilon_2) + \frac{\pi i}{2}\left(\frac{b}{\omega_1} + \frac{B}{\Omega_1}\right) \middle| u_2(o) - u_2(\varepsilon_1) - u_2(\varepsilon_2) + \frac{\pi i}{2}\left(\frac{b}{\omega_1} - \frac{B}{\Omega_1}\right)\right)$

nur in den Punkten ε_1, ε_2.

2) Der RIEMANNsche Satz vom identischen Verschwinden dieser Function sagt in unserm Falle aus, dass zwischen den Functionen v und

(b) $$V = B + \int_{b+a}^{v} \frac{\vartheta(a)\,\vartheta(v-b\,|\,\omega_1,\omega_2)\,dv}{\vartheta'(0)\sqrt{\vartheta(a+b-v\,|\,\omega_1,\omega_2)\;\vartheta(a-b+v\,|\,\omega_1,\omega_2)}}$$

die Gleichung besteht

(c) $$\frac{\vartheta_{11}(v-b\,|\,\omega_1, 2\omega_2)}{\vartheta_{10}(v-b\,|\,\omega_1, 2\omega_2)} = \frac{\vartheta_{11}(V-B\,|\,\Omega_1, 2\Omega_2)}{\vartheta_{10}(V-B\,|\,\Omega_1, 2\Omega_2)}.$$

Aber diese Gleichung ist ebensowenig eine identische, wie die vorangehende (b), welche V durch v ausdrückt. Sie sagt vielmehr, ebenso wie diese, aus, **welche** Function von v das Zeichen V bedeuten muss, wenn der vorige Satz 1) über die Nullpunkte der RIEMANNschen Function ϑ bestehen soll.

3) Diese Gleichung (c) zeigt endlich, dass $v-b$ und $V-B$ nebst ihren Periodicitätsmoduln mit einander vertauschbar sind. Die Gleichung (b) gestattet daher die **unbeschränkte** Inversion, und da aus (c) die Gleichung (b) folgt, so führt die Inversion von (b) notwendig zu einer Gleichung von folgender Form:

(d) $$v = b + \int_{B+A}^{V} \frac{C\,\vartheta(V-B\,|\,\Omega_1,\Omega_2)\,dV}{\sqrt{\vartheta(A+B-V\,|\,\Omega_1,\Omega_2)\;\vartheta(A-B+V\,|\,\Omega_1,\Omega_2)}},$$

wo A und C leicht zu bestimmende Constanten sind. (Vergl. pag. 11.)

Eine directe Verification dieses letzten Satzes war Gegenstand der Aufgabe, welche mir Herr Professor CHRISTOFFEL für das Staatsexamen gestellt hatte, und ist von mir im Januar 1880 der hiesigen K. wissenschaftlichen Prüfungskommission für Schulamtskandidaten eingereicht worden.

Lebenslauf.

Ich, Victor Ferdinand Dœrr, geboren am 1. Februar 1858 zu Kirchheimbolanden in der Rheinpfalz, Protestant, erhielt den ersten Unterricht in der Elementarschule zu Kirberg bei Limburg an der Lahn. Durch Privatunterricht weitergebildet, trat ich Ostern 1871 in das Realgymnasium zu Wiesbaden ein, wo ich Ostern 1876 das Zeugniss der Reife erwarb. Ich widmete mich dem Studium der Mathematik, Physik und Naturwissenschaften. Nachdem ich 3 Semester in Marburg, 2 in Leipzig zugebracht, ging ich Herbst 1878 nach Strassburg i. E. Hier machte ich im Winter 1879/80 das Examen pro fac. doc. Nachdem ich mich noch ein Semester in Strassburg mit mathematischen und physikalischen Studien beschäftigt hatte, trat ich am 15. September 1880 in den elsass-lothringischen Schuldienst ein, in welchem ich mich noch befinde.

Allen meinen verehrten Lehrern, insbesondere Herrn Professor Christoffel, spreche ich an dieser Stelle meinen herzlichen Dank aus.

Strassburg i. E., den 11. Mai 1883.